**Лекция 4. Абсолютная устойчивость и проблема Айзермана в основном случае**

**Абсолютная устойчивость.** На основе результатов, изложенных выше, в лекциях 1 – 3, могут быть сформулированы условия абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1.1), (1.2).

**Теорема 5.** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1. Матрицы  – гурвицевы, функция *

*2. Существует вектор строка  такая, что*

**

*3. Ранг матрицы  равен *

*4. Выполнены условия теорем 2–4.*

*Тогда*

** (1.27)

*где  – некоторое число.*

**Доказательство.** *Так как характеристический полином матрицы  равен*



то при



матрица  будет гурвицевой, где  Следовательно, преобразование  неособое и матрица  – гурвицева.

Из включения  следует ограниченность ресурсов системы. При выполнений условии 2), 3) теоремы преобразования неособое и верны тождества (1.14) – (1.16) и оценки (1.11) – (1.13). Так как выполнены условия теорем 2 – 4, то несобственные интегралы (см. (1.20) – (1.23), (1.25), (1.26))







Тогда





где  – любое число. Отсюда следует оценка (1.27). Теорема доказана.

**Теорема 6.** *Пусть выполнены условия теоремы 5, матрица  – гурвицева, и пусть, кроме того:*

* (1.28)*

*Тогда положение равновесия системы (1.1), (1.2) абсолютно устойчиво. Если, кроме того, величина  где  – сколь угодно малое число, то в секторе  – проблема Айзермана имеет решение.*

**Доказательство.** Так как выполнены условия теоремы 5, то верно неравенство (1.27). Из (1.27) с учетом первого неравенства из (1.28), получим



где  Далее, применяя лемму 5, получим  Заметим, что функция  вдоль решения системы (1.10) непрерывна дифференцируема и удовлетворяет условиям  Скалярная функция  при любом  Несобственный интеграл  Следовательно,  Тогда согласно утверждению леммы 2, предел  Поскольку матрицы  – гурвицевы, то согласно определению 1 тривиальное решение  системы (1.1), (1.2) абсолютно устойчиво.

В случае  – сколь угодно малое число, то выполнены все условия из определения 3, следовательно, в секторе  проблема Айзермана имеет решение. Теорема доказана.

**Проблема Айзермана.** Возникает вопрос: можно ли выделить класс регулируемых систем, для которого проблема Айзермана имеет решение, не прибегая к проверке условия абсолютной устойчивости из теоремы 6.

**Теорема 7.** *Пусть выполнены следующие условия:*

*1. Матрицы  – гурвицевы, функция *

*2. Существует вектор строка  такая, что*

**

*3. Ранг матрицы  равен *

*4. Выполнены условия теорем 2 – 4, где *

*Тогда в секторе  проблема Айзермана имеет решение, где  – сколь угодно малое число, величина  – предельное значение гурвицевости матрицы *

**Доказательство.** Пусть выполнены условия теоремы. Тогда несобственный интеграл



следовательно,

 (1.29)

По условию теоремы  Тогда из (1.29) при  следует, что

 (1.30)

Далее, повторяя доказательства теоремы 6, из (1.30) имеем  Так как  то  Тогда  в силу непрерывности функции  В этом случае, величина  определяется из условия гурвицевости матрицы  следовательно,  В секторе  проблема Айзермана имеет решение

Рассмотрим случай, когда  В этом случае, неравенство (1.30) запишется так

 (1.31)

Из (1.31) следует, что  Из уравнения (1.30) при  имеем    Пусть  Тогда из последнего уравнения (1.4) при  получим  где  Это возможно только при  Следовательно,  и по доказательству выше, в секторе  проблема Айзермана имеет решение. Теорема доказана.

Следует отметить, что величины  поэтому выполнение неравенств  зависит от гурвицевости матрицы и вектора  Поскольку  то матрицы  подобны матрицам  Следовательно, условия гурвицевости матрицы  можно заменить на условия гурвицевости матриц  соответственно. Следовательно. выполнения неравенств  зависит от гурвицевости матрицы  и вектора 